レーザー作用における非線型揺動(Bethe格子,基研研究会報告)

柴田, 文明

式を仮定している。物質組成は，(3)式の第二項を通じて，興奮性機能に影響を与えるが，逆の影響は無視している。興奮性機能は，電気的なものであるため，(1),(2)式 の反応に比べて非常に速い変化をする。そのため，$dP/dt=0$，$dV/dt=0$ として得られる準定常状態が実験的に得られると考えられる。(3)式が三次式であるため，一般に三つの準定常状態が得られるが，タンパク質濃度 (y) が低い場合には，静止状態に対応する一つの準定常状態しかないが，yの増加に伴って興奮及び閾値状態に対応する準定常状態が発生する。(1)～(4) 式から，膜抵抗及び膜電位の時間変化が得られて，それらは実験と良く一致する。詳細については省略したので原論文を見て頂きたい。また，ここでは議論しなかったが，興奮過程に伴ひ，タンパク質や脂質の膜構成成分自体が大きく入れ換っていることが最近実験的に明きらかになった。さらに興奮時にエンタルピーその他の熱力学的量が丁度一次転移の様に不連続に変化をする。

このような点を考慮すると，膜系の興奮現象は構成成分の入れ換えまで含めた開放系に於ける広い意味の相転移と考えなくてはならない。このような場合の興奮性膜の統計理論が今後の課題である。

レーザー作用における非線型揺動

東大・理　　柴　田　文　明

§1. 序

レーザー発振の理論は多くの人々によって展開されているが[1]，その手法はいずれも電磁場を表わす演算子 b^+，物質系を表わす演算子 S^+，S^-，S^0 に対する Langerin eqs. を立てるか，あるいは適当な方法により分布関数の式に直して Fokker－Planck 型の方程式を議論するという形式をとっている。その際問題となるのはレーザー系における巨視変数は何かという点であるのだが，従来の扱いによればそれは b^+ であり S^+ 等であるということになっている。しかしレーザー系は非平衡状態にある典型的な統計力学の問題であるという認識に立てば取り扱かいは以下に示すように，ただ Fokker-Fokker 形にすればよいというようなものではなくなる訳である。

§ 2. モデル，定式化，平均値

本質的な側面を明らかにするために，簡単なモデルを設定しここでは現象論的な取り扱かいを提出する。勿論ミクロに定式化することも可能であるが今回はこの問題に立入らない。図1の様なモデル系を考察する。

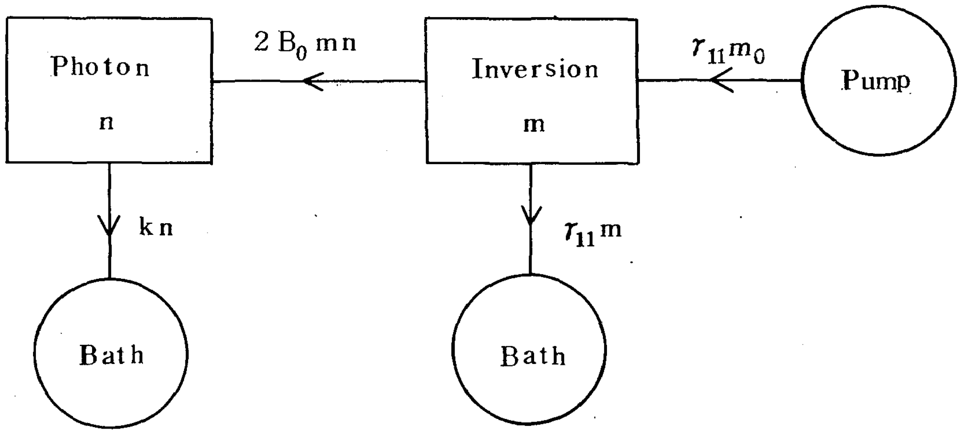

図1

この系に対するmaster eq. はただちに

$$\dot{P}(n,m,t) = \Big\{ (e^{\frac{\partial}{\partial n}} - 1)\, 2kn + (e^{-\frac{\partial}{\partial m}} - 1)\,\gamma_{11} m_0 + (e^{\frac{\partial}{\partial m}} - 1)\,\gamma_{11} m + (e^{-\frac{\partial}{\partial n}} \cdot e^{\frac{\partial}{\partial m}} - 1)\cdot 2 B_0 mn \Big\} P(n,m,t)$$

と書き下せて　$m = O(N)$，$b, b^{+} = 0(N^{1/2})$ であることに注意すればレーザー系では $m, n = 0(N)$ が巨視変数となっている事がわかる。非平衡系の巨視変数の変数の系統的展開法はKubo et. al[2]. により求められているのでこれを用いると，まず平均の運動に対しては上記方程式より

$$\dot{y}_1 = c_{1,1}(\underset{\sim}{y}) = -2k y_1 + (2k / \hat{\sigma}_s)\, y_1 y_2 ,$$

$$\dot{y}_2 = c_{1,2}(\underset{\sim}{y}) = -\gamma_{11} y_2 - (2k / \hat{\sigma}_s)\, y_1 y_2 + \gamma_{11} (1+s)\, \hat{\sigma}_s 。$$

ここに $y_1 = N^{-1} n$，$y_2 = N^{-1} m$; $\hat{\sigma}_s = (N^{-1} K / B_0)$，

$s = (m_0 - \sigma_s) / \sigma_s$; $\hat{n}_s = (\gamma_{11} s \hat{\sigma}_s / 2K)$，

でありこの式はStatz - de Mars eqs. として知られているものである。この式からS

$\gtrless 0$ に応じて図2を描くことができて，安定性及び時間変化を知り得る。

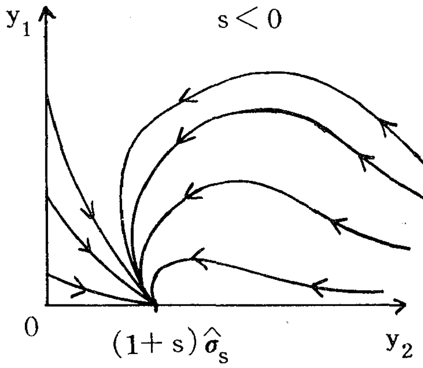

Fig (2－a)

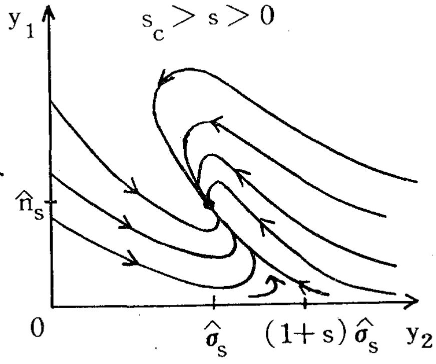

Fig (2－b)

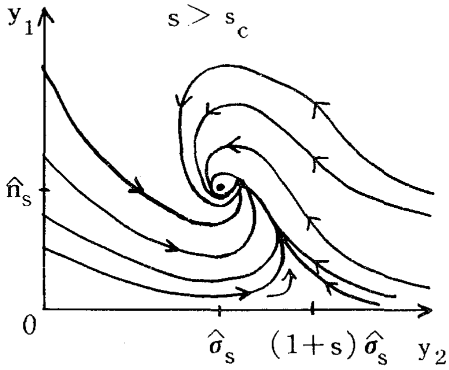

Fig (2－c)

さらに詳しい情報を得るために図2－a に対応する threshold 以下の場合に stationary な解の回りで展開すればその解は

$$\begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = a e^{-\gamma_{11} t} \cdot \mathbf{X}_1 + b e^{2kst} \mathbf{X}_2 ,$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{2k(1+s)}{\gamma_{11}+2ks} \end{pmatrix}$$

となり $s \to -0$ とともに critical slow down を示す。

Threshold 以上では

$$\begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = A e^{\lambda_1 t} \mathbf{X}_1 + B e^{\lambda_2 t} \mathbf{X}_2 \; ; \; \mathbf{X}_1 = - \begin{bmatrix} s \\ \lambda_1 / \gamma_{11} \end{bmatrix}, \; \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 / \gamma_{11} \end{pmatrix}$$

と書け $s \gtrless s_c$ に応じて減衰振動をする解と slow downする解とがあらわれる。

§3. 揺 動

前節の mastor eq. を Ω 展開することにより

$$\dot{\sigma}_{11} = (4k/\hat{\sigma}_s)(y_2 - \hat{\sigma}_s)\,\sigma_{11} + (4k/\hat{\sigma}_s)\, y_1 \sigma_{12} + c_{2,11}(\underset{\sim}{y}),$$

$$\dot{\sigma}_{12} = -(2k/\hat{\sigma}_s)\, y_2 \sigma_{11} - \left[\frac{2k}{\hat{\sigma}_s}(y_1 - y_2) + 2k + \gamma_{11}\right] \sigma_{12} + \left(\frac{2k}{\sigma_s}\right) y_1 \sigma_{22} + c_{2,12}(\underset{\sim}{y}),$$

$$\dot{\sigma}_{22} = -(4k/\hat{\sigma}_s)\, y_2\, \sigma_{12} - 2\left(\frac{2k}{\hat{\sigma}_s} y_1 + \gamma_{11}\right)\sigma_{22} + c_{2,22}(\underset{\sim}{y}),$$

$$c_{2,11}(\underset{\sim}{y}) = 2k\, y_1 + (2k/\hat{\sigma}_s)\, y_1 y_2 \ ; \quad c_{2,12}(\underset{\sim}{y}) = -\left(\frac{2k}{\hat{\sigma}_s}\right) y_1 y_2$$

$$c_{2,22}(\underset{\sim}{y}) = \gamma_{11}\, y_2 + \left(\frac{2k}{\hat{\sigma}_s}\right) y_1 y_2 + \gamma_{11} m_0,$$

というゆらぎに対する coupled eq. を得る。

平均値の時と同様にして stationary な解の回りで線型化して更に対角化して Normal mode を求めると，その式は（above threshold の時）

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Delta\rho_{\mathrm{I\,I}} \\ \Delta\rho_{\mathrm{I\,II}} \\ \Delta\rho_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 + \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\rho_{\mathrm{I\,I}} \\ \Delta\rho_{\mathrm{I\,II}} \\ \Delta\rho_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix} + \hat{A}\cdot\Delta y_1 + \hat{B}\,\Delta y_2$$

という形となり $s < s_c$ では時間の関数として山を持ち，$s > s_c$ では減衰振動の重ね合せ（平均値の時とは異なり）となることが判る。

以上の様に非平衡系の統計力学の問題としてレーザー系をとらえることにより系統的なΩ展開を用いて，平均値及び揺動を論じ得た。

参考文献

1） H. Haken：Handbuch der Physik，XXV，Springer.

M. Lax：Brandeis Univ. Summer Institute of Theoretical Physics, 1966，vol. 2. Gordon and Breach

及びこれらの中の引用文献.

2） R. Kubo，K. Matsuo and K. Kitahara：Jour. Stat. Phys. 9 (1973) 51.